

2 RS 46115

THREE YEAR B.A./B.Sc. (CBCS) DEGREE EXAMINATION, SEPTEMBER 2022.

FOURTH SEMESTER

Mathematics

Paper V — LINEAR ALGEBRA

(w.e.f. 2020-21 Admitted batch)

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

(No additional sheet will be supplied)

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవేని ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

1. Show that the set  $\{(x, y, 0)\}$  where  $x, y \in F$  is a subspace of  $V_3(F)$ .  
 $\{(x, y, 0)\}$   $x, y \in F, V_3(F)$  నకు ఉపసమితి అని చూపండి.
2. Define linear dependence and linear independence of vectors. Show that  $\{(1, 3, 2), (1, -7, -8), (2, 1, -1)\}$  of  $V_3(R)$  is linearly dependent.  
ఋజుపరాధీని, ఋజు స్వాతంత్ర్య సదిశలను నిర్వచించి  $\{(1, 3, 2), (1, -7, -8), (2, 1, -1)\}$  అను  $V_3(R)$  లోని సదిశలు ఋజుపరాధీన అని చూపండి.
3. State and prove N-S condition for non-empty subset  $w$  of a vector space  $V(F)$  to become a vector subspace.  
 $V(F)$  అను సదిశాంతరాళంలోని శూన్యేతర ఉపసమితి  $w$  అనునది సదిశా ఉపాంతరాళము కావడానికి అవశ్యక, పర్యాప్త నియమమును నిర్వచించి నిరూపించండి.
4. If  $V(F)$  is FDVS then show that there exists a basis set of  $V$ .  
 $V(F)$  పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళమయితే,  $V$  లో ఆధార సమితి వ్యవస్థితమని చూపండి.
5. Find a linear transformation in  $T : R^2 \rightarrow R^2$  such that  $T(2, 3) = (4, 5)$  and  $T(1, 0) = (0, 0)$ .  
 $T(2, 3) = (4, 5)$  మరియు  $T(1, 0) = (0, 0)$  అగునట్లు  $T : R^2 \rightarrow R^2$  అను ఋజుపరివర్తనను కనుక్కోండి.
6. If  $U(F)$  and  $V(F)$  are two vector spaces and  $T : U \rightarrow V$  is a linear transformation. Then show that null space  $N(T)$  is a subspace of  $U(F)$ .  
 $U(F)$  మరియు  $V(F)$  లు రెండు సదిశాంతరాళాలు మరియు  $T : U \rightarrow V$  ఒక రేఖీయ పరివర్తనాలయితే శూన్యాంతరము  $N(T)$  అనునది  $U(F)$  కు ఉపాంతరాళము అని చూపండి.

7. Reduce the matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{bmatrix}$  to normal form and hence find its rank.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{bmatrix} \text{ అను మాత్రికను అభిలంబ రూపంలో మార్చి కోటిని కనుక్కోండి.}$$

8. Solve :  $x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 0, 2x_1 - x_2 - x_4 = 0, x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$   
 $x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 0, 2x_1 - x_2 - x_4 = 0, x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$  సాధించండి.

9. Prove that the set  $S = \left\{ \left( \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3} \right), \left( \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right) \right\}$  is an orthonormal set in  $R^3$  with standard inner product.

$$S = \left\{ \left( \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3} \right), \left( \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} \right) \right\} \text{ అను సమితి } R^3 \text{ లోని క్రమ అంతర్లబ్ధము దృష్ట్యా}$$

లంబాబిలంబ సమితి అని చూపండి.

10. In an inner product space  $V(F)$ , prove that  $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\| \forall \alpha, \beta \in V$ .

$V(F)$  అను I.P.S లో  $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\| \forall \alpha, \beta \in V$  అని చూపండి.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

11. If  $w_1$  and  $w_2$  are two subspaces of a vectorspace  $V(F)$  then  $L(w_1 \cup w_2) = w_1 + w_2$ .

$V(F)$  అను సదిశాంతరాళంలోని  $w_1$  మరియు  $w_2$  లు రెండు ఉపాంతరాళములయిన  $L(w_1 \cup w_2) = w_1 + w_2$  అని చూపండి.

Or

12. Show that union of two subspaces is a subspace iff one is contained in the other.

రెండు ఉపాంతరాళాల సమ్మేళనము ఉపాంతరాళము కావడానికి ఒకటి మరొక దానికి ఉపసమితి అనునది అవశ్యక, పర్యాప్త నియమము అని చూపండి.

13. If  $w_1$  and  $w_2$  are two subspaces of FDVS  $V(F)$  then show that  $\dim(w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim(w_1 \cap w_2)$ .

$V(F)$  అను పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళములు  $w_1$  మరియు  $w_2$  లు రెండు ఉపాంతరాళాలు అయితే  $\dim(w_1 + w_2) = \dim w_1 + \dim w_2 - \dim(w_1 \cap w_2)$  అని చూపండి.

Or

14. Show that any two bases of FDVS must have same number of elements.

ఒక పరిమిత పరిమాణ సదిశాంతరాళము యొక్క ఏ రెండు ఆధారాలలోని మూలకాల సంఖ్య సమానము అని చూపండి.

2 RS 46115

15. Find  $T(x, y, z)$  where  $T : R^3 \rightarrow R$  is defined by  $T(1,1,1) = 3, T(0,1,-2) = 1, T(0,0,1) = -2$ .  
 $T : R^3 \rightarrow R$  ను  $T(1,1,1) = 3, T(0,1,-2) = 1, T(0,0,1) = -2$  గా నిర్వచిస్తే  $T(x, y, z)$  ను కనుక్కోండి.

Or

16. State and prove Rank-nullity theorem.  
కోటి- చూన్యతా సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

17. Find eigen roots and corresponding eigen vectors of the matrix  $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ .

పై మాత్రిక యొక్క ఐగెన్ మూలాలు మరియు ఐగెన్ సదిశల సంబంధతను కనుగొనుము.

Or

18. State and prove Cayley-Hamilton theorem.  
Cayley-Hamilton theorem ను నిర్వచించి నిరూపించండి.

19. State and prove Cauchy-Schwartz inequality.  
Cauchy-Schwartz అసమానతను నిర్వచించి నిరూపించండి.

Or

20. Define orthogonal set and orthonormal set. Show that in an inner product space any orthonormal set of vectors is linearly independent.  
అంబ మరియు అంబాభిలంబ సమితులను నిర్వచించి, అంతర్లబ్ధాంతరాళంలోని అంబాభి అంబ సదిశల సమితి ఋజు స్వాతంత్ర్యాలు అని చూపండి.

2 RS 46115